Математичка гимназија у Београду
Додатна настава за други разред
27.11.2005.

Неједнакости 3

Миливоје Лукић

Хелдерова неједнакост: Нека су p, q реални бројеви различити од 0 и 1 такви да је $1/p + 1/q = 1$, и нека су $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ два низа ненегативних реалних бројева, и ако је $p < 0$ онда су сви елементи низа a позитивни, и ако је $q < 0$ онда су сви елементи низа b позитивни. Тада: ако је $p > 1$ важи

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q} \tag{1}$$

док ако је $p < 1$ онда је смер неједнакости супротан. У оба случаја једнакост важи ако и само ако су низови a^p и b^q пропорционални.

Неједнакост Минковског: Нека је $r \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, и $\{a_i\}_{i=1}^n$, $\{b_i\}_{i=1}^n$ произвољни низови, за $r > 0$ ненегативних, а за $r < 0$ позитивних реалних бројева. Тада за $r > 1$ важи

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^r\right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^r\right)^{1/r} \tag{2}$$

док ако је $r < 1$ онда је смер неједнакости супротан. У оба случаја једнакост важи ако и само ако су низови a и b пропорционални.

Низ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *мајорира* низ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, у ознаци $(a) \succ (b)$, ако је $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, и

$$\sum_{i=1}^k a_i \geq \sum_{i=1}^k b_i \text{ за све } k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i.$$

Мјурхедова неједнакост: Нека је

$$T[a_1, a_2, \ldots, a_n](x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\pi \in S(n)} x_1^{a_{\pi(1)}} x_2^{a_{\pi(2)}} \cdots x_n^{a_{\pi(n)}}, \tag{3}$$

при чему $S(n)$ означава скуп свих пермутација скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тада, уколико низ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ мајорира низ $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, онда за све n-торке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ненегативних бројева важи

$$T[a_1, a_2, \ldots, a_n](x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq T[b_1, b_2, \ldots, b_n](x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4}$$

Једнакост је испуњена ако и само ако $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Од користи може бити и идентитет

$$T[a_1, a_2, \ldots, a_n]T[b_1, b_2, \ldots, b_n] = \sum_{\sigma \in S(n)} T[a_1 + b_{\sigma(1)}, a_2 + b_{\sigma(2)}, \ldots, a_n + b_{\sigma(n)}]. \tag{5}$$

Шурова неједнакост: За $a, b > 0$ важи

$$T[a+2b, 0, 0](x, y, z) + T[a, b, b](x, y, z) \geq 2T[a+b, b, 0](x, y, z), \tag{6}$$

уз једнакост ако и само ако је $x = y = z$.

1. (Кинеска олимпијада 1988. 1. задатак) Нека су $a_1,a_2,\dots,a_n$ дати реални бројеви, не сви једнаки 0. Реални бројеви $r_1,r_2,\dots,r_n$ су такви да је за све реалне бројеве $x_1,x_2,\dots,x_n$ испуњено

$$\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i - a_i) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}.$$

Одредити $r_1,r_2,\dots,r_n$.

2. Нека је $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \in [0,1]$, и $m \in \mathbb{Z}$, $r \in [0,1)$ такво да важи

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = m + r.$$

Доказати да је

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq m + r^2.$$

3. (ИМО 1995.) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да је

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

4. (ИМО 2001.) Доказати да је

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

за све позитивне бројеве a, b и c.

5. (БМО 2001.) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви, такви да је $a+b+c \geq abc$. Доказати да је $a^2+b^2+c^2 \geq abc\sqrt{3}$.